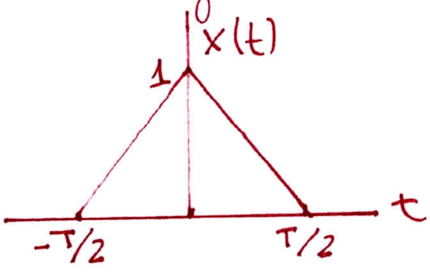
PROBLEMA 1. Demostrar, aplicando la propiedad de derivación, que la transformada de Fourier de la función triángulo mostrada en la figura viene dada por la siguiente expresión:



$$X(j\omega) = \frac{T}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{4\pi}\right)$$

$$* \;\; \operatorname{sen}^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$$

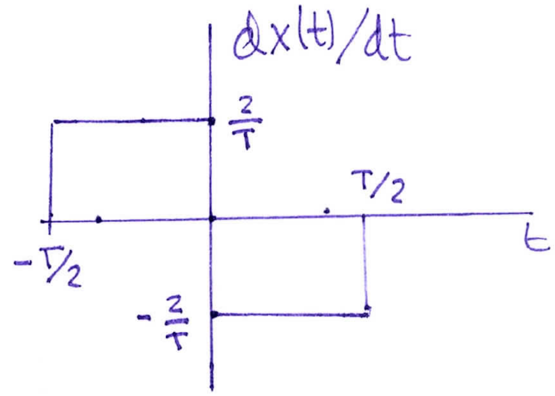
Propiedad de derivación de la transformada de Fourier:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FT} j\omega X(j\omega)$$

Calculamos la derivada de $x(t)$:

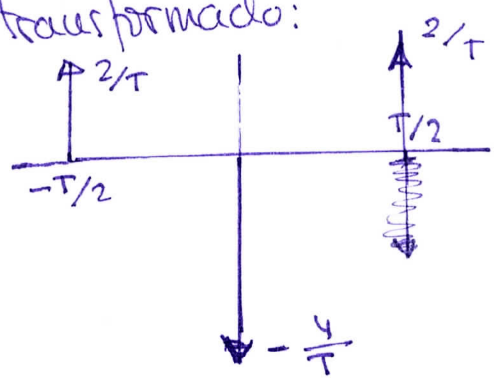
$$m_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1-0}{0-\left(-\frac{T}{2}\right)} = \frac{2}{T}$$

$$m_2 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1-0}{0-\frac{T}{2}} = -\frac{2}{T}$$



Calculamos la derivada segunda y vemos su representación en la frecuencia, en el dominio transformado:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{FT} (j\omega)^2 X(j\omega)$$



La expresión analítica de $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ es:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{2}{T}\delta\left(t+\frac{T}{2}\right) - \frac{4}{T}\delta(t) + \frac{2}{T}\delta\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

Calculamos la transformada de Fourier:

$$X_2(j\omega) = \frac{2}{T}e^{j\omega T/2} - \frac{4}{T} + \frac{2}{T}e^{-j\omega T/2} =$$

$$= \frac{2}{T}\left(e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}\right) - \frac{4}{T} =$$

$$= \frac{4}{T}\cos\frac{\omega T}{2} - \frac{4}{T} = -\frac{4}{T}\left(1-\cos\frac{\omega T}{2}\right) =$$

$$= -\frac{4}{T}\left(1-\cos 2\frac{\omega T}{4}\right) =$$

$$= -\frac{8}{T}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)$$

(donde $X_2(j\omega)$ es la transformada de la derivada segunda respecto al tiempo).

Como $$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \longleftrightarrow \underbrace{(j\omega)^2X(j\omega)}_{X_2(j\omega)}$$

podemos escribir:

$$X_2(j\omega) = -\frac{8}{T}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right) = (j\omega)^2X(j\omega)$$

y así obtener $X(j\omega)$:

$$X(j\omega) = \frac{-1}{(j\omega)^2} \frac{8}{T} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right) =$$

$$= \frac{8}{\omega^2 T} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right) = \frac{T}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{4\pi}\right)$$

$$\frac{8}{\omega^2 T} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right) = \frac{8}{\omega^2 T} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\pi \frac{\omega T}{4\pi}\right)}{\frac{4}{\omega T}\left(\pi \frac{\omega T}{4\pi}\right)} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\pi \frac{\omega T}{4\pi}\right)}{\frac{4}{\omega T}\left(\pi \frac{\omega T}{4\pi}\right)} =$$

$$= \frac{T}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{4\pi}\right)$$